Einleitung

Even the seemingly polished and well-developed chapters of classical invariant theory, such as the theory of binary forms, now reveal themselves on closer inspection to be sadly deficient in content and proof. The grey area between the known and the unknown, between the solidly established result and likely conjectures, casts a shade of uncertainty behind which the open problems still hide themselves from the reader born several generations later.

Kung & Rota, 1984, [71], S. 28

„Man kann wohl behaupten, dass die Kenntnis der Invariantentheorie keine sehr verbreitete ist, obwohl diese Disziplin in viele Gebiete der Mathematik wesentlich eingreift, und auf ihre Bedeutung stets von neuem hingewiesen wird.“ Mit dieser Feststellung begann Wilhelm Franz Meyer sein 1909 veröffentlichtes Lehrbuch der Invariantentheorie ([77]), und sie ist auch heute noch gültig. Wenig bekannt ist sie immer noch, die Theorie der Invarianten, die rund fünfzig Jahre lang als wichtigster Zweig der Algebra betrachtet wurde, doch ihre Ergebnisse und Methoden leben in vielen heute aktuellen Disziplinen fort. Aus der Invariantentheorie entwickelte sich die moderne Algebra, und viele Namen bedeutender Forscher dieses Gebietes sind noch heute geläufig: George Boole, Arthur Cayley, James Joseph Sylvester, Otto Hesse, Ferdinand Eisenstein, David Hilbert, Emmy Noether. Was ist diese Invariantentheorie, über die Charles S. Fisher 1966 schrieb „[i]n the 1880's and 90's the Theory of Invariants was seen to have unified many areas of mathematics, but by 1940 mathematicians, if asked, would have said the theory was dead“ ([37], S. 138)?

Der eigene Standpunkt bestimmt wie man Invariantentheorie definiert. Eine Beschreibung anhand von Beispielen werden wir im ersten Kapitel erleben. Eine exakte Definition, wie sie vor hundert Jahren üblich gewesen wäre, erfolgt in Kapitel 2. In der neueren Literatur findet man einen anderen Zugang zur Invariantentheorie: Gian-Carlo Rota schreibt „Invariantentheorie ist das Studium der Bahnen von Gruppenwirkungen“ ([89], S. 3). Dies alleine genügt ihm jedoch nicht. Es fehlt die programmatische Aussage, die seiner Meinung nach Hermann Weyl in dessen Buch [120] in den beiden Behauptungen „alle geometrischen Tatbestände sind durch das Verschwinden von Invarianten wiedergegeben“ und „alle Invarianten sind Invarianten von Tensoren“ zusammenfasst. Diese moderne Definition von Invariantentheorie kann man aber erst seit etwa fünfzig Jahren aufstellen, nachdem die Darstellungstheorie für Gruppen entwickelt worden war. Weyl nutzte dieses Hilfsmittel, um klassische Invariantentheorie in der Sprache der Gruppen und Tensoren zu formulieren. Unter geometrischen Tatbeständen verstehen wir Eigenschaften geometrischer Objekte des (projektiven) Raumes, die unabhängig vom gewählten Koordinatensystem sind. Betrachten wir das einfachste und älteste Beispiel und wählen als Raum

die Gerade. Eine endliche Menge von Punkten auf dieser Geraden kann als Nullstellenmenge eines Polynoms beschrieben werden, so dass es genügt, Polynome zu betrachten. Die Eigenschaft eines quadratischen Polynoms $p(x) = x^2 + 2a_1x + a_2$ eine doppelte Nullstelle zu haben, ist invariant unter Translation. Anders formuliert, wenn das Polynom $p(x)$ eine doppelte Nullstelle hat, so auch das Polynom $p(x + c)$ für eine Konstante c. Eine Invariante, die diese Eigenschaft ausdrückt, ist die Diskriminante $D(a_1, a_2) := a_1^2 - a_2$. Wie man sich leicht überlegt, wird die Diskriminante genau dann 0, wenn das Polynom $p(x)$ eine doppelte Nullstelle hat (eine ausführliche Diskussion dieses Beispieles erfolgt in Kapitel 1). Geometrische Eigenschaften widerspiegelnde Gleichungen müssen somit unabhängig vom ausgewählten Koordinatensystem sein, d.h. sie müssen invariant unter Koordinatentransformationen sein. Also ist das Programm der Invariantentheorie seit ihrer Begründung die Übersetzung von geometrischen Eigenschaften in invariante algebraische Gleichungen, wobei letztere heutzutage in der Sprache der Tensoren ausgedrückt werden.
Bei diesem Versuch, zu erklären, was Invariantentheorie ist, wurde einerseits von heutiger Invariantentheorie gesprochen, andererseits immer wieder die klassische Anschauung erwähnt. Um Invariantentheorie besser verstehen zu können, sollten wir ihre geschichtliche Entwicklung etwas näher verfolgen.

Meyer bezeichnet das Jahr 1841 als Geburtsjahr der eigentlichen Invariantentheorie, da George Boole zu diesem Zeitpunkt die Invarianteneigenschaft der Diskriminante nachwies und ein einfaches Prinzip angab, um simultane Invarianten von Formen zu erhalten ([75], S. 82). Indes sind die Ursprünge der Invariantentheorie vielfältig. Felix Klein meint, dass die Invariantentheorie aus der Zahlentheorie entstand und verweist auf die Untersuchungen von Gauss, der in seiner *Disquisitiones Arithmeticae* das Verhalten binärer quadratischen Formen unter linearer Substitution untersuchte ([66], S. 155). Noch früher entdeckte Joseph-Louis Lagrange Invarianten bei der Untersuchung von Problemen der Mechanik, die er 1788 in seinem Werk *Mécanique analytique* veröffentlichte. Dessen Beschreibungen weckten ein halbes Jahrhundert später das Interesse von George Boole, der in zwei Artikeln (1839 und 1841) das Thema als rein mathematisch interessante Frage behandelte und es als ein „ample field of research and discovery“ bezeichnete (vgl. [21], S. 242). Eine Feststellung, welche die Neugierde des jungen Arthur Cayley anfachte, und die dessen ganzes Leben lang nicht erlosch.

Unabhängig davon führten in Deutschland geometrische Probleme zur Invariantentheorie. Otto Hesse entdeckte 1844 bei der Ausarbeitung einer Theorie für ebene Kurven dritten Grades das mächtige Werkzeug der Determinantenbildung, um kritische Punkte von Kurven zu berechnen. Hierbei fiel ihm auf, dass die später nach ihm benannte Determinante eine Invariante der Kubik, genauer gesagt, eine Invariante des die Kubik definierenden Polynoms ist. Gleichzeitig, aber unabhängig von ihm, machte auch Eisenstein bei seinen zahlentheoretischen Untersuchungen der Kubik dieselbe Entdeckung. So wie Boole 1841 das physikalische Problem Lagranges als algebraisch interessantes Problem an sich begriff und auf diese Weise die mathematische Invariantentheorie in England begründete, so trennte Siegfried Aronhold 1849 in Deutschland die Invariantentheorie von den geometrischen Fragestellungen seines Lehrers Hesse ab.
Diese geometrischen Probleme verdanken ihre Existenz so berühmten Geometern wie Gaspard Monge, Jean Victor Poncelet, August Ferdinand Möbius und Julius Plücker. Sie führten zu Anfang des 19. Jahrhunderts die projektive Geometrie ein, die unabhängig von metrischen Betrachtungen ist. In der klassischen

projektiven Geometrie untersuchte man vorwiegend geometrische Gebilde, die durch Polynome niedrigen Grades beschrieben werden. Für die Untersuchung von Polynomen beliebigen Grades braucht man starke algebraische Hilfsmittel, deren Entwicklung in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts große Fortschritte erzielte. Aus der projektiven Geometrie entwickelte sich über die Invariantentheorie die algebraische Geometrie.

Vor 1850 waren kaum Methoden bekannt, um systematisch Invarianten zu erzeugen, so dass die Suche hiernach anfangs im Vordergrund stand. Die wichtigsten Fragestellungen der Invariantentheorie wurden erstmals 1846 in dem Artikel [12] von Cayley formuliert (vgl. [37], S. 142). Allgemein beschäftigte sich Cayley mit einer Methode zur Berechnung von Kovarianten, doch schreibt er auf Seite 19

> [e]n continuant mes recherches sur ce sujet, je suis parvenu à une nouvelle manière d'envisager le problème, qui en même temps qu'elle est beaucoup plus générale, a l'avantage de s'appliquer directement au seul cas que l'on peut espérer de développer, celui des fonctions à deux variables. On peut en effet se proposer la question: ‚Trouver toutes les derivées d'un nombre quelconque de fonctions, qui aient la propriété de ne pas changer de forme, en faisent subir aux variables des transformations lineaires quelconques'.. [...] Il reste cependant une question à résoudre, laquelle à ce qu'il parait présente les plus grandes difficultés, celle de déterminer les dérivées *indépendantes* et la liason entre celles-ci et les autres.[1]

Er fordert auf, alle Ableitungen (d.h. Invarianten) zu finden und vermutet mit sicherem Instinkt, dass der binäre Fall der einzige ist, der Aussicht auf eine erfolgreiche Bearbeitung bietet. In gewisser Weise behielt er damit auch Recht, denn mit keiner klassischen Methode konnten mehr als der binäre Fall und einige wenige weitere Spezialfälle erfolgreich gelöst werden. Erfolgreich bedeutet hier, dass für binäre Formen bis einschließlich Grad 8 und einige wenige Formen in mehr Unbestimmten *Fundamentalsysteme* berechnet werden konnten. Als Fundamentalsystem bezeichnet man eine minimale Menge von Kovarianten, durch die alle anderen Kovarianten polynomial ausgedrückt werden können. Die Elemente eines Fundamentalsystems heißen *Grundformen*. Zudem konnte Gordan zeigen, dass alle binären Formen ein endliches Fundamentalsystem besitzen. Über Formen in mehr als zwei Variablen wußte man lange Zeit wenig.

Des Weiteren erkennt Cayley die Rolle der unabhängigen Ableitungen (d.h. der Grundformen) und der Syzygien zwischen diesen. Obschon die Anzahl der Kovarianten, die zu einer binären Form gehören, unendlich ist, genügen in Wirklichkeit endlich viele, um all diese zu erzeugen. Somit reicht es aus, eine „kleine" Zahl von Kovarianten, die Grundformen, und alle Syzygien zwischen diesen zu kennen, um alle Kovarianten zu kennen. Indes konnte Cayley die Existenz eines solchen Fundamentalsystems nur für binäre Formen vom Grade $n \leq 4$ zeigen. Für solche höheren Grades glaubte er 1856 (fälschlicherweise) nachgewiesen zu haben, dass es kein end-

[1] „Bei meiner weiteren Forschung zu diesem Thema bin ich zu einer neuen Betrachtungsweise des Problems gelangt, die viel allgemeiner ist. Gleichzeitig bietet sie den Vorteil, direkt auf den einzigen Fall anwendbar zu sein, den man sich zu entwickeln erhoffen kann, nämlich den der Funktionen in zwei Variablen. Man kann sich in der Tat folgende Aufgabe stellen: ‚Alle Ableitungen einer beliebigen Anzahl von Funktionen zu finden, welche die Eigenschaft haben, ihre Gestalt unverändert beizubehalten, wenn die Variablen einer beliebigen linearen Transformation unterzogen werden.' [...] Es bleibt hingegen eine Frage zu beantworten, die gegenwärtig die größten Schwierigkeiten bereitet: Die Bestimmung der *unabhängigen* Ableitungen und der Beziehung zwischen diesen und den anderen."

liches Erzeugendensystem gäbe. Trotzdem arbeitete er weiter auf diesem Gebiet und berechnete auch neue Kovarianten.

Die von CAYLEY formulierten Aufgaben wurden im Wesentlichen mit zwei verschiedenen, konkurrierenden Methoden angegangen. Die Grundlagen der *enumerativen Methode* wurden von CAYLEY in den 1840er und 1850er Jahren entwickelt, während unabhängig davon ARONHOLD und CLEBSCH in Deutschland die *symbolische Methode* ausbauten, die abstrakter und fundierter, jedoch nach dem Empfinden der englischen Mathematiker völlig unverständlich war. Dieselbe Meinung hatten auch die deutschen Invariantentheoretiker von den Methoden ihrer englischen Kollegen, so dass nur selten eine Zusammenarbeit stattfand, die über den Austausch von Ergebnissen hinaus ging. Oder um es mit MEYERs Worten zu sagen

> Während die [...] englischen, französischen und italienischen Mathematiker in regem Ideenaustausch miteinander standen [...], bleibt dasselbe in Deutschland lange unbeachtet. [Einen] Übergang hat erst Aronhold an einem klassischen Beispiel bewerkstelligt (1858), indem er aus der Hesse'schen Theorie der ternären kubischen Formen die invarianten Fasern blosslegt, und ihr so eine von allem Künstlichen und Zufälligen befreite, abgeschlossene Gestalt giebt ([75], S. 95).

In den Anfangsjahren der Theorie dominierten eindeutig die Engländer, angeführt von CAYLEY und SYLVESTER, die mit der enumerativen Methode ein mächtiges Werkzeug in den Händen hielten, um Invarianten zu „berechnen" und um theoretische Erkenntnisse zu erlangen. Man mag einwenden, dass „berechnen" nicht der richtige Ausdruck sei, denn in Wirklichkeit berechneten sie keine Invarianten, sondern nur die Anzahl der Invarianten und deren Grade. Trotzdem wird in dieser Arbeit stets die Formulierung „Invarianten berechnen" benutzt.

Die Entwicklung der symbolischen Methode in Deutschland verlief langsamer und reifte erst 1863 durch den Artikel „*Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie*" von ARONHOLD zu einer vollständig ausgearbeiteten Theorie ([4]). So dauerte es auch nur noch fünf weitere Jahre bis PAUL GORDAN nachwies, dass jede binäre Form ein endliches Fundamentalsystem besitzt ([43]). Mit dieser Arbeit war die Hauptfrage der Invariantentheorie für binäre Formen beantwortet. Trotz intensivster Bemühungen konnten CAYLEY und SYLVESTER GORDANs Ergebnis niemals mit ihrer Methode beweisen. Als Grund für dieses Versagen führt KAREN PARSHALL in [85], S. 186 an, dass die englische Schule die Berechnung von Kovarianten überbetont und die Grundlegung durch korrekt bewiesene Sätze vernachlässigt habe. Zwar versuchten Mitarbeiter von CAYLEY und SYLVESTER diese Lücken zu schließen, doch war der Erfolg nur mäßig, da der algorithmische Ansatz der Theorie dieses nur beschränkt zuließ. Recht harsch bezeichnet PARSHALL das Buch [35] als ein Kochbuch für die Zubereitung von Kovarianten (*ebd.*). Zugleich räumt sie ein, dass diese Methode auch große Erfolge feierte, da sie die Berechnung von Kovarianten und der Syzygien zwischen diesen ermöglichte, wo dies mittels der symbolischen Methode nicht möglich war. In der Anwendung dieser Methode traten Probleme auf, die viel zur Entwicklung der Kombinatorik und der Theorie der symmetrischen Formen beitrugen (vgl. [85], S. 186). Auch der symbolische Ansatz war im Grunde algorithmisch, nur auf einem etwas höheren Abstraktionsniveau. So scheiterte auch die symbolische Methode an der Aufgabe, einen Endlichkeitsbeweis für Formen in mehr als zwei Variablen zu finden. Dies gelang erst HILBERT 1888 mit sehr viel abstrakteren Methoden [58].

Es mag heutigen MathematikerInnen seltsam erscheinen, dass der bedeutende Basissatz oder der Nullstellensatz für HILBERT nur Hilfssätze waren, die er benutzte, um wichtigere Sätze der Invariantentheorie zu beweisen. Über die Bedeutung seiner Arbeit war er sich völlig im Klaren, beendete er doch seinen Artikel [60] mit dem Satz „Hiermit sind, glaube ich, die wichtigsten allgemeinen Ziele einer Theorie der durch die Invarianten gebildeten Functionenkörper erreicht“. Ein Blick in das Inhaltsverzeichnis von [62] zeigt, dass er danach in der Tat kaum eine Arbeit im Bereich Invariantentheorie veröffentlichte. Interessant und aufschlussreich ist seine Sicht der Geschichte der Invariantentheorie ([61]):

> In der Geschichte einer mathematischen Theorie lassen sich meist 3 Entwicklungsperioden leicht und deutlich unterscheiden: Die naive, die formale und die kritische. Was die Theorie der algebraischen Invarianten anbetrifft, so sind die ersten Begründer derselben, CAYLEY und SYLVESTER, zugleich auch als die Vertreter der naiven Periode anzusehen: an der Aufstellung der einfachsten Invariantenbildungen und an den eleganten Anwendungen auf die Auflösung der Gleichungen der ersten 4 Grade hatten sie die unmittelbare Freude der ersten Entdeckung. Die Erfinder und Vervollkommner der symbolischen Rechnung CLEBSCH und GORDAN sind die Vertreter der zweiten Periode, während die kritische Periode in [meinen Arbeiten] ihren Ausdruck findet.

Diese Worte des erst 31-jährigen sind im Kern wahr, denn in den nächsten Jahrzehnten ließ das Interesse an der klassischen Invariantentheorie nach.[2] Dennoch gab es immer bedeutende MathematikerInnen, die sich mit Invariantentheorie beschäftigten, wenn auch auf einer abstrakteren Ebene. EMMY NOETHER entwickelte um 1920 bedeutende Grundlagen für die Invariantentheorie der endlichen Gruppen. 1939 versuchte WEYL die Invariantentheorie auf eine abstraktere, modernere Grundlage zu stellen und in den Kontext der Darstellungstheorie halbeinfacher Gruppen einzubinden. 1959 gab MASAYOSHI NAGATA ein Gegenbeispiel zu HILBERTs 14. Problem und 1965 begründete DAVID MUMFORD die geometrische Invariantentheorie. HOCHSTER und ROBERTS verbesserten das Verständnis der Struktur der Invariantenringe als sie 1974 nachwiesen, dass Invariantenringe linear reduktiver Gruppen Cohen-Macaulay sind. Ab 1975, als der Buchberger-Algorithmus entwickelt wurde, erlebte auch der algorithmische Bereich einen rasanten Aufschwung. Seitdem gibt es einige Implementierungen in Computeralgebrasystemen, die zum Teil auf alten Arbeiten, insbesondere von HILBERT beruhen.

Invariantentheorie umfasst mehr interessante Fragen als die bislang erwähnten nach der Endlichkeit eines Fundamentalsystems oder der nach Methoden zur Berechnung von Kovarianten. Da diese Doktorarbeit sich jedoch ausschließlich mit der Berechnung von Grundformen beschäftigt, erscheint es mir sinnvoll, die allgemeinen historische Einführung auf diesen Ausschnitt zu beschränken. Für einen umfassenderen geschichtlichen Überblick möchte ich auf die Bücher [75], [66], [83] und [87], sowie die Artikel [37], [21], [22], [84], [86], [85], verweisen. Besonders interessant für ein vertieftes Verständnis dieser Epoche sind die in den *Mathematischen Annalen* veröffentlichten Biographien der bedeutenden Mathematiker dieser Zeit: CLEBSCH (Band 7), CAYLEY (46), SYLVESTER (50), HERMITE (55), SALMON (61) und GORDAN (74).

[2] Quellenangaben zu den im Folgenden erwähnten Originalarbeiten und geschichtlichen Fakten, sowie weitere Details kann man in [37], [83] und anderen Büchern über Invariantentheorie finden.

Eine Einführung in die heutige Invariantentheorie, die Methoden der Darstellungstheorie der Gruppen und der Algebraischen Geometrie benutzt, bieten [26], [69], [70], [92] und [103]. Besonders hervorheben möchte ich den Artikel [31], in dem Jacques Dixmier sehr schön die wichtigsten Fragestellungen der „klassischen" und heutigen Invariantentheorie in moderner Sprache formuliert und mit vielen Beispielen verständlich erklärt.

Das Thema dieser Dissertation ist die Berechnung von Fundamentalsystemen binärer Formen, so dass ich nun einen Überblick über die bislang bekannten Ergebnisse und die Geschichte ihrer Entdeckung gebe. Während Fundamentalsysteme für die ersten vier binären Formen leicht zu berechnen sind und schon sehr früh bekannt waren, konnte erst Gordan 1868 mittels seines konstruktiven Endlichkeitsbeweises quasi als Anhang Fundamentalsysteme der Fünf- und der Sechsform angeben. In den folgenden Jahren bis 1888 konnte von Gall nach weiterer Vorarbeit durch Gordan Fundamentalsysteme der Acht- und der Siebenform finden. Zwar veröffentlichten Sylvester und Franklin 1879 eine Tabelle mit den Ordgraden und Anzahlen aller Grundformen bis einschließlich der Zehnform ([117]) und sogar der Zwölfform zwei Jahre später ([119]), doch tauchten kurze Zeit später Zweifel an der Richtigkeit der von ihnen benutzten Methode auf. Die enumerative und die symbolische Methode sind in gewisser Hinsicht komplementär. Bei letzterer stellt man ein endliches Erzeugendensystem auf und versucht so viele Kovarianten als möglich aus diesem zu reduzieren. Es gibt allerdings keine Gewähr dafür, dass alle reduziblen Kovarianten wirklich ausgeschieden werden konnten. Somit kann mit der symbolischen Methode nur eine obere Schranke für die Anzahl der Grundformen einer binären Form berechnet werden. Umgekehrt verhält es sich mit der enumerativen Methode. Syzygien zwischen Grundformen können hierdurch nicht immer erkannt werden, so dass zu viele Grundformen abgezogen werden und die Anzahl der hiermit berechneten Grundformen nur eine untere Schranke bilden. Der Hauptunterschied zwischen den beiden Methoden ist, dass erstere Grundformen explizit berechnet, während letztere nur Angaben über Eigenschaften von Grundformen (Anzahl und Ordgrad) macht, ohne diese explizit zu berechnen und berechnen zu können.
Stimmen die Ergebnisse der mittels der enumerativen Methode berechneten Fundamentalsysteme mit denen der mittels symbolischer Methode berechneten überein und liegen keine Rechenfehler vor, dann ist das auf beide Weisen berechnete Fundamentalsystem korrekt, d.h. weder fehlen irreduzible Kovarianten, noch befinden sich unter den Elementen dieses Systems reduzible.

Sylvester wollte die Einschränkung seiner Methode nicht hinnehmen und postulierte deswegen, dass niemals sowohl eine Grundform als auch ein Syzygie zwischen Grundformen gleichzeitig auftreten können. Da er keinen Beweis für sein *Fundamentalpostulat* liefern konnte, stützte er sich auf moralische Gründe und die Abwesenheit eines Gegenbeispiels (vgl. [22], S. 339). Während die mit dieser Methode berechneten Werte für alle binären Formen vom Grade nicht größer als sechs und für die Achtform korrekt sind, fand zunächst Hammond 1882 ein Gegenbeispiel für die Siebenform ([49]) und 1912 Morley weitere Gegenbeispiele für die Neun- bis Vierzehnform ([78]). Morley vermutete, dass das von Sylvester angewandte Verfahren auch für alle weiteren binären Formen von noch höherem Grade zu wenige Kovarianten finden würde. Indes existierte bis zu dieser Dissertation kein Beweis für diese Annahme. Ein weiterer Nachteil des Sylvesterschen Verfahrens ist, dass es nicht konstruktiv ist, d.h. es ist nicht möglich, die entsprechenden Grundformen explizit anzugeben, was bei der symbolischen Methode im Prinzip möglich ist. Nachdem MORLEY gezeigt hatte, dass SYLVESTERs Werte für die Sieben-, Neun-, Zehn- und Zwölfform unvollständig waren, gab es keine neuen Ergebnisse, wenn man von der Bestätigung der Berechnungen für die Invarianten der Achtform ([91]) im Jahre 1967 und drei Korrekturen bei der Anzahl der Invarianten der Siebenform ([29]) im Jahre 1986 absieht.

Grad der binären Form	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
Anzahl der Invarianten	1	1	2	4	5	26 (33)	9	89	99	109
Anzahl der Kovarianten	2	4	5	23	26	124 (153)	69	415	475	948

Tabelle 1: KLASSISCHE FUNDAMENTALSYSTEME

In Tabelle 1 ist die Anzahl der SYLVESTER bekannten Grundformen abgedruckt. In Klammern stehen bei der Siebenform die Zahlen VON GALLs, die jedoch auch falsch sind. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die korrekte Zahl der Invarianten 30 und die der Kovarianten 147 ist. Ferner zeigte bereits MORLEY, dass die Zahlen für die Neun-, Zehn- und Zwölfform zu niedrig sind.

Über diese Dissertation

Ausgangspunkt dieser Dissertation war die Frage, ob moderne Rechner genügend schnell sind, um die bei der Aufstellung von vollständigen Fundamentalsystemen binärer Formen anfallenden Berechnungen in akzeptabler Zeit bewältigen zu können. Hierzu wurden mehrere Ansätze ausprobiert. Die von mir geschriebenen `C++`-Programme werden nun vorgestellt.

Zwar gab es schon mehrere Arbeiten, die sich mit der Aufstellung und Berechnung *Erzeugender Funktionen* für die Invarianten einer binären Form beschäftigten und über die Ergebnisse SYLVESTERs hinausgehen (vgl. [31], §6), doch meines Wissens nach gab es keinen Versuch, die Erzeugenden Funktionen für die Kovarianten binärer Formen zu berechnen. Das Programm `franklin` benutzt eines der von FRANKLIN in [38] angegebenen Verfahren, um die Erzeugende Funktion für die Kovarianten binärer Formen zu berechnen. Ein Vergleich der Berechnungen dieses Programmes mit den Ergebnissen FRANKLINs anhand einiger Beispiele zeigt, dass die damaligen Berechnungen genau und fehlerfrei durchgeführt wurden.

Ein weiteres Programm, `siebung`, implementiert eine im selben Artikel von FRANKLIN angegebene Methode, um eine Tabelle der Fundamentalformen zu „berechnen“. Dieses bestätigt wiederum die früheren Ergebnisse. Darüberhinaus kann `siebung` sämtliche Fundamentalsysteme binärer Formen bis etwa Grad 20 innerhalb weniger Sekunden finden.[3] Schriebe man das Programm um, so dass es exakte Arithmetik benutzt, könnte man noch Fundamentalsysteme für binäre Formen von deutlich höherem Grade ausrechnen. Dass diese keine vollständigen Fundamentalsysteme sein können, wird in Kapitel 5 begründet, in welchem erstmalig ein Beweis veröffentlicht wird, dass die von SYLVESTER entwickelte *Siebung* für binäre Formen vom Grade $n = 7$ und $n \geq 9$ nicht alle Grundformen finden kann.

[3]Eine Ergebnistabelle ist auf Seite 147 abgedruckt. Mit „finden“ meine ich natürlich keine explizite Berechnung der Grundformen, sondern die Angabe der Anzahlen in den jeweiligen Ordgraden (vgl. die Ausführungen auf Seite xiv).

Einen anderen Ansatz bietet der von GORDAN in seinem konstruktiven Endlichkeitsbeweis ([43]) benutzte Algorithmus. Dessen Implementierung für konkrete Polynome im Programm `kovariante` ermöglichte eine Verifizierung aller bislang bekannten Ergebnisse für Fundamentalsysteme vom Grade $n \leq 6$ und $n = 8$. Das Fundamentalsystem der Siebenform konnte bis Ordnung 27 berechnet werden. Zudem konnte die Existenz einer Invariante in Ordnung 30 nachgewiesen werden. Da VON GALL in [42] gezeigt hatte, dass es keine weiteren Grundformen gibt – sofern ihm kein Rechenfehler unterlief –, kann man nun erstmalig von der exakten Kenntnis dieses Fundamentalsystems ausgehen. Neben den drei bereits 1986 von DIXMIER und LAZARD als zerlegbar gefundenen Invarianten ([29], [30]), gibt es drei weitere zerlegbare Kovarianten, so dass insgesamt 147 Grundformen übrig bleiben, die allesamt wirklich unzerlegbar sind. SYLVESTERs Siebung weist nur auf die Existenz von 124 Grundformen hin.

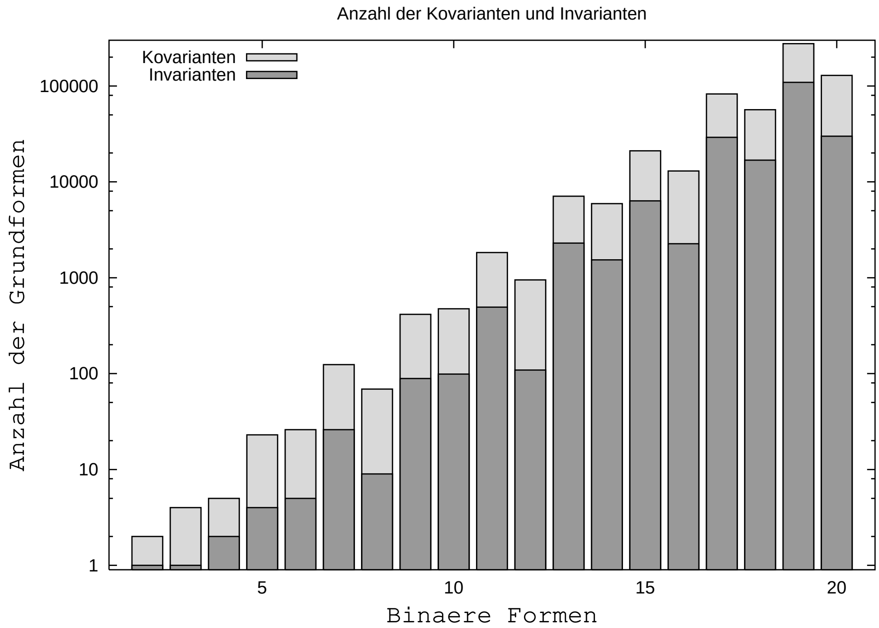

Abbildung 1: UNTERE SCHRANKEN FÜR DIE ANZAHL DER GRUNDFORMEN

Ein vollständiges Fundamentalsystem der Neunform konnte zwar nicht berechnet werden, doch ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass nur noch wenige Grundformen fehlen. Weitere Fundamentalsysteme konnten mit dem Programm `kovariante` nur in Ansätzen gefunden werden, da der Speicher- und Rechenaufwand zu groß wird. Die durch `siebung` gefundenen unteren Schranken zeigen, dass die Anzahl der Elemente eines Fundamentalsystems (s. Abbildung 1) viel zu stark ansteigt, um effizient berechnet werden zu können. Insbesondere sind diese Schranken deutlich höher als die bislang bekannten unteren Schranken. Zwar ist die Anzahl der algebraisch unabhängigen Invarianten einer binären Form f_n vom Grade n klein, wie man seit langem weiß: Für $n \geq 3$ ist deren Anzahl $n - 2$ (vgl. [77], S. 269 oder [92], 3.3.8). Doch die Anzahl der Grundformen von f_n nimmt exponentiell zu (s. Kapitel 3.4.4).

Die Reduzierung von Kovarianten mittels der symbolischen Methode erfolgte im 19. Jahrhundert fast ausschließlich durch die von GORDAN gefundene Reihenentwicklung. Dieses Verfahren wurde implementiert (Programm `gordan`), um einige klassische Ergebnisse zu überprüfen. Hierbei tauchten einige Unstimmigkeiten in der Literatur auf, die noch näher untersucht werden könnten (vgl. S. 79). Es handelt sich um Beispiele von reduziblen Kovarianten, deren Zerlegung angeblich durch Reihenentwicklung nicht gefunden werden kann. Für jedes dieser drei Beispiele konnte `gordan` eine Zerlegung finden. Interessant ist diese Frage im Zusammenhang mit einem Programm zur Berechnung von Fundamentalsystemen, das zur Gänze auf der Zerlegung von Kovarianten durch Reihenentwicklung basiert. Hierdurch könnte man eine Zerlegung der drei reduziblen Kovarianten in von Galls Fundamentalsystem finden, eine Methode, die mehr dem klassischen Geiste entspricht als die in dieser Dissertation benutzte, die auf reiner Rechenkraft basiert. Ein solcher Ansatz wird zwar in dieser Arbeit vorgestellt, doch wurde dieser nicht weiterverfolgt. Zum einen ist die Komplexität des Verfahrens unklar und zum anderen muss zuerst geklärt werden, ob dieser Ansatz wirklich ein minimales Fundamentalsystem finden kann, oder ob es doch reduzible Kovarianten gibt, die man hierdurch nicht erkennen kann.

Während die von Jordan in [64] aufgestellten Schranken für den höchsten Grad einer Grundform für $n \leq 12$ mit Ausnahme von $n = 3$ erreicht werden, kann auf Grund der in dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse die plausible Vermutung aufgestellt werden, dass diese Schranken für $n > 12$ zu groß sind. Hingegen scheint die bestmögliche Schranke, die (sehr wahrscheinlich) stets angenommen wird und bereits vor knapp 100 Jahren in [47], S. 326ff veröffentlicht wurde, heute vergessen zu sein, jedenfalls konnte ich sie in keiner modernen Arbeit finden (vgl. Kapitel 3.4).

Nicht zuletzt bietet diese Dissertation einen umfassenden Überblick über die theoretischen Grundlagen der klassischen Methoden zur Berechnung von Fundamentalsystemen und deren Anwendung mit Hilfe von modernen Rechnern. Nahezu alle Sätze und Lemmata wurden mit ausführlichen Beweisen versehen, um Verweise auf andere Lehrbücher und Artikel zu vermeiden und hierdurch das Verständnis der klassischen Invariantentheorie zu erleichtern. In einigen wenigen Einzelfällen muss allerdings doch auf andere Literatur zurückgegriffen werden. Viele Beispiele und (historische) Bemerkungen erleichtern den Zugang zu dieser interessanten mathematischen Disziplin.

Natürlich ist die Invariantentheorie nicht nur Selbstzweck, sondern hat viele Anwendungen in der Mathematik und anderen Bereichen der Wissenschaft. Wegen deren Vielzahl und Umfang musste ich mich auf eine Anwendung beschränken. In den Kapiteln 1.3 und 2.6 gehe ich genauer auf die Klassifikation von binären Formen mit Hilfe von Kovarianten ein. Zahlreiche Artikel des *Journals für die Reine und Angewandte Mathematik* aus der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts beschäftigen sich mit den geometrischen Aspekten. Einige Beispiele werden in [66], S. 160-167; [47], Kapitel X und XI und insbesondere in dem Lehrbuch [19] von Clebsch diskutiert. In neuerer Zeit profitierte die Theorie der Modulformen von der Invariantentheorie: Tetsuji Shioda untersuchte in seiner Doktorarbeit die Struktur des Invariantenringes der binären Achtform, um den Modulraum der hyperelliptischen Kurven vom Geschlecht 3 besser zu verstehen ([91]).

Auf Gröbnerbasen beruhende Algorithmen werden in [103] vorgestellt, doch sind diese für die Berechnung von Fundamentalsystemen wenig effizient und werden im Folgenden nicht mehr erwähnt.

Die Berechnung von Fundamentalsystemen ist das Hauptziel dieser Dissertation gewesen, so dass diesem Thema auch der Aufbau dieser Arbeit untergeordnet wurde. In Kapitel 1 werden Beispiele für Kovarianten und deren Anwendung vorgestellt, anhand derer in die klassischen Problemstellungen der Invariantentheorie eingeführt werden wird. Nachdem sich die LeserInnen mit Invarianten vertraut gemacht haben, erfolgt im zweiten Kapitel eine formale Definition der In- und Kovarianten. Außerdem werden die meisten der benötigten Eigenschaften der Kovarianten genannt und bewiesen. Insbesondere werden die Begriffe *Cayley-Aronholdsche Differentialoperatoren*, *Semiinvariante* und *Residuum* eingeführt. Das Kapitel schließt mit einer Anwendung von Kovarianten, der Lehre von den *kanonischen Formen.* Die Berechnung von Kovarianten mittels „brachialer Gewalt“ und GORDANs Algorithmus bilden den Hauptteil des dritten Kapitels. Hierzu wird in die ARONHOLDsche Symbolik eingeführt. Als Anwendung werden alle Fundamentalsysteme bis zur Vierform berechnet. Zum Abschluss werden *a priori Schranken* für Grad und Ordnung von Grundformen vorgestellt und *Syzygien* betrachtet. Nachdem im dritten Kapitel ausschließlich die Methoden der deutschen Richtung vorgestellt wurden, folgen im vierten Kapitel diejenigen der englischen. CAYLEYs so genannte *Erzeugenden Funktionen* werden vorgestellt, mit deren Hilfe Fundamentalsysteme bis zur Vierform ausgerechnet werden, um die Methoden des dritten mit denen des vierten Kapitels in der Anwendung vergleichen zu können. SYLVESTERs *Siebung* der Erzeugenden Funktion ist das fünfte Kapitel gewidmet. Die zweite Hälfte dieses Kapitels ist seinem *Fundamentalpostulat* und dessen Widerlegung gewidmet. Im letzten Kapitel werden die erstellten Programme und die mit ihnen erzielten Ergebnisse beschrieben. Im Anhang sind alle Fundamentalsysteme bis einschließlich der Achtform abgedruckt. Fundamentalsysteme binärer Formen höheren Grades sind teilweise wiedergegeben. Des Weiteren sind Erzeugende Funktionen bis zur Achtform aufgeführt. Quelltexte der Programme, Ergebnisse und einige Dokumentationen stehen im Internet unter

`http://www.croenihill.de/Diss/`

zur Verfügung.

Bei allen, die mir in den letzten knapp vier Jahren geholfen haben, möchte ich mich ganz herzlich bedanken. Besonderer Dank gebührt Prof. Dr. WOLFRAM DECKER, *der mir dieses faszinierende Thema stellte, dessen Bearbeitung mir viel Freude bereitete. Mit meinen Freunden* RENÉ BEIER, RALF ENGEL, PATRICK GEBHARD, MICHAEL KIPP, MARTIN KLESEN *und* CHRISTIAN KÖNIG *führte ich viele fruchtbare Diskussionen über die beste Weise, meine Algorithmen zu implementieren.* CHRISTIAN *war, obgleich er selber wenig Zeit hatte, stets bereit, bei der Jagd nach Käfern zu helfen. Außerdem danke ich* BARBARA *für ihre Suche nach Rechtschreibfehlern in diesem Text, von dem sie nur den nichtmathematischen Anteil verstand. Für die kritischen mathematischen Anmerkungen danke ich* RALF SCHMIDT.

Zeittafel: Die Entdeckung von Fundamentalsystemen binärer Formen von den Anfängen bis zur Gegenwart

1856 CAYLEY findet Fundamentalsysteme für die binären Formen vom Grade $n \leq 4$ und zeigt fälschlicherweise, dass es keine weiteren endlichen Fundamentalsysteme gibt ([14]).

1868 GORDAN zeigt, dass alle binären Formen ein endliches Fundamentalsystem besitzen und berechnet mittels der symbolischen Methode ein solches für die Fünfform und die Sechsform ([43]).

1878 SYLVESTER veröffentlicht ein mittels Siebung „berechnetes“ Fundamentalsystem der Achtform ([109]) und der Siebenform ([113]).

1879 Sylvester veröffentlicht ein mittels Siebung „berechnetes" Fundamentalsystem der Zehnform ([114]) und der Neunform ([116]).

Sylvester veröffentlicht mittels Siebung „berechnete" Fundamentalsysteme der binären Form bis einschließlich Grad 10 ([117]).

1880 Von Gall veröffentlicht ein mittels symbolischer Methode berechnetes Fundamentalsystem der Achtform, das eine reduzible Form enthält ([39], [40], [41]).

1881 Sylvester veröffentlicht ein mittels Siebung „berechnetes" Fundamentalsystem der Zwölfform ([116]).

Sylvester zeigt durch explizite Rechnung, dass die einzige von seinem Fundamentalsystem abweichende Kovariante in von Galls Fundamentalsystem reduzibel ist ([119]).

1882 Hammond findet einen Beweis, dass das mittels Siebung „berechnete" Fundamentalsystem der Siebenform unvollständig ist. Dies impliziert die Widerlegung des Fundamentalpostulats ([49], [17], [50]).

1883 Stroh findet mittels der symbolischen Methode eine Zerlegung der letzten strittigen Kovarianten in von Galls Fundamentalsystem der Achtform ([97]).

1888 von Gall berechnet ein Fundamentalsystem der Siebenform ([42]).

1890 Hammond bestätigt teilweise die Berechnungen von Galls für die Invarianten der Siebenform ([52]).

1912 Morley veröffentlicht einen Nachweis, dass für sechs weitere binäre Formen (Neun- bis Vierzehnform) kein Fundamentalsystem mittels Siebung „berechnet" werden kann ([78]).

1967 Shioda verifiziert die Angaben von Galls für die Invarianten der Achtform ([91]).

1986 Dixmier und Lazard korrigieren die Angaben von Galls für die Invarianten der Siebenform mittels rechnergestützten Berechnungen ([29], [30]).