

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>xi</b>
Über diese Dissertation . . . . .	xvii
Zeittafel: Die Entdeckung von Fundamentalsystemen binärer Formen . . .	xx
Notation . . . . .	xxii
Benutzte Rechner . . . . .	xxii
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Von der Geometrie ausgehend . . . . .	1
1.2 Quadratische Polynome . . . . .	2
1.2.1 Quadratische Polynome in einer Variablen . . . . .	2
1.2.2 Homogene Polynome und projektive Transformationen . . . .	4
1.2.3 Etwas Projektive Geometrie . . . . .	6
1.2.4 Die Geometrie der quadratischen Formen . . . . .	7
1.3 Die Kubik . . . . .	7
1.3.1 Invariante Bildungen . . . . .	8
1.3.2 Die Kovarianten der Kubik . . . . .	9
1.3.3 Klassifikation der Kubiken . . . . .	10
1.3.4 Das Fundamentalsystem der Kubik . . . . .	11
1.3.5 Fragestellungen . . . . .	12
1.3.6 Einschub: rationale Darstellungen . . . . .	12
<b>2 Eigenschaften von Kovarianten</b>	<b>15</b>
2.1 Binäre Formen . . . . .	15
2.1.1 Algebraische Struktur . . . . .	19
2.2 Zur Charakterisierung von Kovarianten und Invarianten . . . . .	21
2.3 Beweis der Hauptsätze zur Charakterisierung von Invarianten . . . .	24
2.3.1 Spezielle Transformationen . . . . .	25
2.3.2 Notwendige Bedingungen . . . . .	27
2.3.3 Hinreichende Bedingungen . . . . .	29
2.4 Die Hauptsätze zur Charakterisierung von Kovarianten . . . . .	32
2.5 Semiinvarianten und Differentialoperatoren . . . . .	35
2.5.1 Semiinvarianten . . . . .	35
2.5.2 Jede Semiinvariante ist Leitglied einer Kovariante . . . . .	38
2.5.3 Das Residuum . . . . .	45
2.6 Beispiele für Invarianten und Kovarianten und deren Anwendungen .	47
2.6.1 Die Resultante . . . . .	47
2.6.2 Die Diskriminante . . . . .	48
2.6.3 Die Hesseform . . . . .	48
2.6.4 Über die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständige Potenz . . . . .	49

2.6.5	Über die Darstellbarkeit einer binären Form als Summe von Potenzen von Linearfaktoren . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Über die Berechnung von Kovarianten</b>	<b>55</b>
3.1	Mit „brachialer Gewalt“ . . . . .	55
3.1.1	Berechnung linear unabhängiger Invarianten . . . . .	56
3.1.2	Beispiel: Die Invarianten der Quartik bis Ordnung vier . . . .	57
3.1.3	Die Matrix des linearen Gleichungssystems . . . . .	59
3.1.4	Die Verwendung von Residuen . . . . .	61
3.2	Symbolische Methode . . . . .	62
3.2.1	Grundbegriffe . . . . .	62
3.2.2	Primitiver Algorithmus . . . . .	66
3.2.3	Faltung und Überschiebung . . . . .	66
3.3	Überschiebungen von konkreten Polynomen . . . . .	71
3.3.1	Eigenschaften der Überschiebungen . . . . .	71
3.3.2	Beispiel: Die Kovarianten der Quartik bis Ordnung vier . . . .	73
3.3.3	Reihenentwicklungen . . . . .	74
3.3.4	Die Kovarianten der Ordnung 2 . . . . .	78
3.3.5	Die Kovarianten der Ordnung 3 . . . . .	78
3.3.6	Unstimmigkeiten in der Literatur . . . . .	79
3.3.7	GORDANS Algorithmus . . . . .	80
3.3.8	Beispiel: Das Fundamentalsystem der Quadratik . . . . .	80
3.3.9	Beispiel: Das Fundamentalsystem der Kubik . . . . .	81
3.3.10	Beispiel: Das Fundamentalsystem der Quintik bis Ordnung 4 . . .	82
3.3.11	Bemerkungen zu GORDANS Algorithmus . . . . .	85
3.4	Obere Schranken für Grad und Ordnung eines Fundamentalsystems . .	87
3.4.1	Die Schranken von CAMILLE JORDAN . . . . .	87
3.4.2	Die Schranken von SYLVESTER . . . . .	88
3.4.3	Die Schranken von GRACE & YOUNG . . . . .	89
3.4.4	Über die Anzahl der irreduziblen Invarianten . . . . .	91
3.5	Syzygien . . . . .	92
3.5.1	Einführende Beobachtungen . . . . .	92
3.5.2	Syzygienberechnung mit Computeralgebrasystemen . . . . .	95
3.5.3	Syzygien zwischen Überschiebungen . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Erzeugende Funktionen</b>	<b>101</b>
4.1	Der Cayley-Sylvestersche Fundamentalsatz . . . . .	102
4.1.1	Das Hermitesche Reziprozitätsgesetz . . . . .	106
4.2	Vorbereitungen . . . . .	107
4.2.1	Diophantische Gleichungen . . . . .	107
4.2.2	Zerfällungen . . . . .	109
4.2.3	Erzeugende Funktionen . . . . .	110
4.2.4	Gaußpolynome . . . . .	111
4.3	Die Erzeugende Funktion für die Anzahl linear unabhängiger Kovari- anten . . . . .	112
4.3.1	Herleitung . . . . .	112
4.3.2	Erste Anwendungen . . . . .	113
4.3.3	Anwendung: Das Fundamentalsystem der Linearform . . . . .	116
4.3.4	Anwendung: Das Fundamentalsystem der Quadratik . . . . .	116
4.3.5	Anwendung: Das Fundamentalsystem der Kubik . . . . .	117

4.3.6	Anwendung: Das Fundamentalsystem der Quartik . . . . .	121
4.4	Eine Erzeugende Funktion für Invarianten . . . . .	123
4.4.1	Eine Erzeugende Funktion für die Invarianten der Quintik . .	123
4.4.2	Die Invarianten der Quintik . . . . .	124
4.5	Cohen-Macaulay . . . . .	125
4.5.1	Grundlagen . . . . .	125
4.5.2	Invarianten . . . . .	127
4.5.3	Kovarianten . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Siebung</b> . . . . .	<b>131</b>
5.1	Naive Siebung . . . . .	131
5.1.1	Beispiel für die Berechnung eines Fundamentalsystems durch naive Siebung . . . . .	132
5.1.2	Erste Analyse am Beispiel der Quintik . . . . .	133
5.2	Die reduzierte Erzeugende Funktion . . . . .	134
5.3	Die repräsentierende Erzeugende Funktion . . . . .	138
5.4	Siebung der repräsentierenden Erzeugenden Funktion . . . . .	142
5.4.1	Ergebnisse der Siebung . . . . .	147
5.4.2	Tests für die Korrektheit der Berechnungen . . . . .	148
5.5	SYLVESTERS Fundamentalpostulat im Spiegel der Geschichte . . . .	150
5.6	Nachweis der Existenz gewisser Syzygien . . . . .	152
5.6.1	Binäre Formen ungeraden Grades . . . . .	153
5.6.2	Binäre Formen geraden Grades . . . . .	154
5.7	Existenz einer speziellen Grundform für binäre Formen ungeraden Grades . . . . .	154
5.7.1	Formalisierung des Siebungsprozesses . . . . .	154
5.7.2	Eine Abschätzung für $\Xi_n$ . . . . .	157
5.7.3	Eine Abschätzung für $\Delta_n$ . . . . .	160
5.8	Existenz einer speziellen Grundform für binäre Formen geraden Grades	163
5.8.1	Formalisierung des Siebungsprozesses . . . . .	163
5.8.2	Eine Abschätzung für $\Xi_n$ . . . . .	165
5.8.3	Eine Abschätzung für $\Delta_n$ . . . . .	166
<b>6</b>	<b>Praxis der Berechnung</b> . . . . .	<b>171</b>
6.1	Vorüberlegungen . . . . .	171
6.1.1	Über die minimale Anzahl der Monome einer Kovariante . . .	171
6.1.2	Über Abbruchkriterien – Klassische Ansätze . . . . .	172
6.1.3	Über Abbruchkriterien – Moderner Ansatz . . . . .	175
6.1.4	Warum ein Orakel nützlich ist . . . . .	178
6.1.5	Praktische Durchführung einer Überschiebung . . . . .	179
6.2	<code>jordan</code> . . . . .	181
6.2.1	Kurzübersicht . . . . .	181
6.2.2	Beispiel . . . . .	181
6.2.3	Analyse und Ergebnisse . . . . .	181
6.3	<code>franklin</code> . . . . .	182
6.3.1	Kurzübersicht . . . . .	182
6.3.2	Beispiel . . . . .	182
6.3.3	Programmablauf . . . . .	182
6.3.4	Analyse und Ergebnisse . . . . .	183
6.4	<code>hilbert</code> . . . . .	184

6.4.1	Kurzübersicht . . . . .	184
6.4.2	Beispiel . . . . .	184
6.4.3	Programmablauf . . . . .	185
6.4.4	Analyse und Ergebnisse . . . . .	185
6.5	<b>siebung</b> . . . . .	186
6.5.1	Kurzübersicht . . . . .	186
6.5.2	Beispiel . . . . .	186
6.5.3	Programmablauf . . . . .	187
6.5.4	Analyse und Ergebnisse . . . . .	188
6.6	<b>gordan</b> . . . . .	189
6.6.1	Kurzübersicht . . . . .	189
6.6.2	Beispiel . . . . .	189
6.6.3	Programmablauf . . . . .	190
6.6.4	Analyse und Ergebnisse . . . . .	190
6.7	<b>invariante</b> . . . . .	191
6.7.1	Kurzübersicht . . . . .	191
6.7.2	Fähigkeiten . . . . .	191
6.7.3	Beschreibung . . . . .	192
6.7.4	Beispiel . . . . .	193
6.7.5	Programmablauf . . . . .	195
6.7.6	Analyse . . . . .	196
6.7.7	Erzielte Ergebnisse . . . . .	202
6.8	<b>kovariante</b> . . . . .	204
6.8.1	Kurzübersicht . . . . .	204
6.8.2	Hilfsprogramme . . . . .	205
6.8.3	Beispiel . . . . .	206
6.8.4	Programmablauf . . . . .	210
6.8.5	Vorbereitungen: Das Orakel . . . . .	211
6.8.6	Berechnung einer Ordnung . . . . .	212
6.8.7	Berechnung eines Ordgrades . . . . .	212
6.8.8	Programmende . . . . .	214
6.8.9	Analyse und Ergebnisse . . . . .	214
<b>A</b>	<b>Fundamentalsysteme</b>	<b>217</b>
A.1	Elementare Fundamentalsysteme . . . . .	217
A.1.1	Zweifform . . . . .	217
A.1.2	Dreifform . . . . .	217
A.1.3	Vierform . . . . .	218
A.2	Weitere klassische Fundamentalsysteme . . . . .	219
A.2.1	Fünfform . . . . .	219
A.2.2	Sechsfarm . . . . .	221
A.2.3	Achtform . . . . .	223
A.3	Die Siebenform . . . . .	225
A.4	Hohe Formen . . . . .	229
A.4.1	Neunform . . . . .	229
A.4.2	Zehnform . . . . .	231
A.4.3	Elfform . . . . .	232
A.4.4	Zwölfform . . . . .	233
A.4.5	Dreizehnform . . . . .	234
A.4.6	Siebzehnform . . . . .	234

---

<b>B Erzeugende Funktionen</b>	<b>235</b>
B.1 Kubik . . . . .	235
B.2 Quartik . . . . .	235
B.3 Quintik . . . . .	235
B.4 Sextik . . . . .	237
B.5 Septik . . . . .	239
B.6 Oktavik . . . . .	241
 <b>Literaturverzeichnis</b>	 <b>242</b>
 <b>Formelverzeichnis</b>	 <b>251</b>
 <b>Personenverzeichnis</b>	 <b>252</b>
 <b>Stichwortverzeichnis</b>	 <b>254</b>